ECOLE NATIONALE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d' ADMISSION 1977

EPREUVES ECRITES d' ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 Heures)

L'USAGE DES TABLES NUMERIQUES ET DES REGLES A CALCUL EST AUTORISE.

L'EMPLOI DE CALCULATRICE ELECTRONIQUE EST FORMELLEMENT INTERDIT.

Les deux problèmes sont indépendants.

PREMIER PROBLEME

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels,
$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls,
$\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

1°/ Soit f une fonction numérique, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, l'intégrale $I(x) = \int_0^1 f(tx)\,dt$ existe.

On appellera I la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe $I(x)$.

b) Calculer $I(0)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad I(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u)\,du$

c) Etudier la parité de I quand f est paire ou impaire.

d) Montrer que I est continue au point 0.

e) Montrer, en le justifiant, que la fonction I est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
I' désignant la fonction dérivée de la fonction I, calculer $I'(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}^*$.

2°/ On suppose, de plus, que f est dérivable en 0.

a) Montrer que I est dérivable en 0 et calculer $I'(0)$.
Montrer que I est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad I'(x) = \int_0^1 t\, f'(tx)\,dt,$$

f' désignant la fonction dérivée de la fonction f.

3°/ On suppose maintenant f indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert contenant le point 0.

a) Montrer que I admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n, quel que soit l'entier naturel n.
Donner ce développement limité.

b) Ecrire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 de la fonction I dans le cas où f est définie par : $\forall u \in \mathbb{R}$, $f(u) = u \operatorname{ch} u$.
Retrouver le résultat en calculant l'intégrale $I(x)$.

4°/ On se propose de trouver toutes les fonctions numériques f, définies et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant la relation :

$$(1) : \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^1 f(tx)\,dt = x\, f(x)$$

a) Soit f une telle fonction. Calculer $f(0)$ et montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(2) : \qquad (1 - 2x)\, y = x^2\, y'$$

b) Déterminer toutes les solutions de l'équation (2) sur $\mathbb{R}^*$. En déduire les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant la relation (1).

c) Représenter graphiquement la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}, \quad \text{si } x \neq 0$$

$$g(0) = 0.$$

d) Déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^1 f(tx)\,dt = x\, f(x) + \frac{x(1 - 2x)}{2}$$

.../...

×I62×
ECOLE DES MINES DE DOUAI
1977

DEUXIEME PROBLEME

1°/ Soit a un nombre réel vérifiant : $0 < a < 1$.

On considère la suite de nombres réels définie par :

- la relation de récurrence :

$u_n = (1-a)\, u_{n-1} + a\, u_{n-2}$ pour tout n entier supérieur ou égal à 2.

- les deux premiers termes : u_0 et u_1.

Pour tout n entier supérieur ou égal à 1, on pose : $d_n = u_n - u_{n-1}$.

a) Montrer que pour tout n entier supérieur ou égal à 1, d_n et d_{n+1} sont de signes opposés et que la suite des valeurs absolues des d_n est décroissante.

En déduire que la suite de terme général u_{2p} et la suite de terme général u_{2p+1} tendent vers une même limite, quand l'entier naturel p tend vers plus l'infini. Calculer cette limite.

b) Montrer qu'on peut trouver trois nombres réels α, β et x tels que pour pour tout entier naturel n : $u_n = \alpha x^n + \beta$. (On pourra calculer d'abord x au moyen de la formule de récurrence, puis α et β en fonction de u_0 et u_1).

Retrouver ainsi la limite de u_n quand n tend vers l'infini.

2°/ Soient O, M_0 et M_1 trois points d'un plan affine euclidien $\mathscr{E}$.

Soit k un nombre réel strictement positif.

On appelle M_2 le barycentre de M_0 affecté du coefficient 1 et de M_1 affecté du coefficient k, M_3 le barycentre de M_1 affecté du coefficient 1 et de M_2 affecté du coefficient k .... On construit ainsi par récurrence une suite de points : $\left(M_n\right)_{n \geqslant 0}$.

M_{n+2} est le barycentre des points M_n affecté du coefficient 1 et M_{n+1} affecté du coefficient k.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM_{n+2}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+1}}$

En déduire la limite G du point M_n quand n tend vers l'infini.

Montrer que G est le barycentre des points M_0 et M_1 affectés de coefficients que l'on précisera.

$\left(\text{On pourra poser : } a = \frac{1}{1+k}\right)$.

b) A tout point M_n on fait correspondre le point P_n défini par :

$$\overrightarrow{OP_n} = a\overrightarrow{OM_n} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OM_n}$$

Prouver que $\overrightarrow{OP_n} + \overrightarrow{OM_{n+1}}$ est un vecteur $\overrightarrow{OR}$ indépendant de n.

On suppose que O, M_0 et M_1 ne sont pas alignés et on appelle D la droite passant par M_0 et M_1. Montrer que tous les points P_n appartiennent à une même droite D', parallèle à D.

Après avoir construit D' et R, indiquer une construction géométrique simple de M_{n+2} et P_{n+2} à partir de P_n.

Construire effectivement M_2, M_3, M_4 et M_5, ainsi que G.

3°/ On rappelle que l'isobarycentre d'une famille finie de points est le barycentre de ces points affectés d'un même coefficient non nul.

Soient A_0, B_0, ..., L_0, n+1 points de $\mathscr{E}$. (On suppose : $n \geqslant 2$)

Soit : A_1 l'isobarycentre des n points : B_0, C_0, ..., K_0, L_0,

B_1 l'isobarycentre des n points : A_0, C_0, ..., K_0, L_0,

- -

L_1 l'isobarycentre des n points : A_0, B_0, ..., K_0.

De même, soit :

A_2 l'isobarycentre des n points : B_1, C_1, ..., K_1, L_1,

B_2 l'isobarycentre des n points : A_1, C_1, ..., K_1, L_1,

- -

L_2 l'isobarycentre des n points : A_1, B_1, ..., K_1.

En répétant l'opération, on définit ainsi n+1 suites de points :

$$\left(A_p\right)_{p \geqslant 0}, \left(B_p\right)_{p \geqslant 0}, \ldots, \left(L_p\right)_{p \geqslant 0}$$

a) Montrer que A_2 est le barycentre de A_0 affecté du coefficient $\frac{1}{n}$ et de A_1 affecté du coefficient $\frac{n-1}{n}$.

b) Déterminer la limite commune des suites $\left(A_p\right)_{p \geqslant 0}, \left(B_p\right)_{p \geqslant 0}, \ldots, \left(L_p\right)_{p \geqslant 0}$.

(On pourra faire une figure en prenant comme points A_0, B_0, C_0, D_0 les sommets d'un carré).

FIN

XI63X

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail